**Esercizi 8 – 28 novembre 2001**

**1)** Dimostrare che $f(z)$ è olomorfa se e solo se $\overline{f(\overline{z})}$ è olomorfa.

Se $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, allora $\overline{f(\overline{z})} = u(x,-y) - i\,v(x,-y) = U(x,y) + i\,V(x,y)$. Si ha allora $U_x(x,y) = u_x(x,-y)$, $U_y(x,y) = -u_y(x,-y)$, $V_x(x,y) = -v_x(x,-y)$ e $V_y(x,y) = v_y(x,-y)$. Siccome $f$ è olomorfa, $u$ e $v$ soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann, e quindi $u_x(x,-y) = v_y(x,-y)$ (da cui segue che $U_x(x,y) = V_y(x,y)$ e $u_y(x,-y) = -v_x(x,-y)$ (da cui segue che $U_y(x,y) = -V_x(x,y)$); pertanto, $\overline{f(\overline{z})}$ è olomorfa dal momento che $U$ e $V$ sono $C^1$ e soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann.

**2)** Dimostrare che non esiste nessuna funzione olomorfa $f(z)$ tale che $\Re(f(z)) = 3x^2 + y^2$; trovare due funzioni continue su $\mathbf{C}$ di cui $3x^2 + y^2$ sia la parte reale.

Sia $f(z) = 3x^2 + y^2 + i\,v(x,y)$. Se $f$ fosse olomorfa, dovrebbero valere le equazioni di Cauchy-Riemann, e quindi $v_x(x,y) = -2y$ e $v_y(x,y) = 6x$. Equivalentemente, $v$ dovrebbe essere una funzione il cui gradiente $\nabla v$ è uguale a $(-2y, 6x)$. Dal momento che la forma differenziale $\omega(x,y) = -2y\,dx + 6x\,dy$ non è esatta (non essendo chiusa), una tale funzione non esiste. Se $\varphi(x,y)$ è una qualsiasi funzione continua su $\mathbf{R}^2$, la funzione $f(z) = f(x+iy) = 3x^2 + y^2 + i\,\varphi(x,y)$ ha come parte reale $3x^2 + y^2$ ed è continua.

**3)** Determinare una funzione non nulla $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tale che $u(x,y) = \varphi(x)\,\mathrm{sen}(y)$ sia la parte reale di una funzione olomorfa definita su $\mathbf{C}$. Successivamente, determinare almeno una funzione olomorfa $f(z)$ la cui parte reale sia $u(x,y)$.

Sia $f(z) = \varphi(x)\,\mathrm{sen}(y) + i\,v(x,y)$. Chiedere che $f$ sia olomorfa è equivalente a chiedere che $\varphi$ sia $C^\infty(\mathbf{R})$, che $v$ sia $C^\infty(\mathbf{R}^2)$ e che valgano le equazioni di Cauchy-Riemann. In particolare, deve essere

$$\nabla v(x,y) = (v_x(x,y), v_y(x,y)) = (-\varphi(x)\,\cos(y), \varphi'(x)\,\mathrm{sen}(y))\,.$$

Equivalentemente, deve essere esatta su $\mathbf{R}^2$ la forma differenziale

$$\omega(x,y) = -\varphi(x)\,cos(y)\,dx + \varphi'(x)\,\mathrm{sen}(y)\,dy\,.$$

Essendo $\mathbf{R}^2$ semplicemente connesso, condizione necessaria e sufficiente affinché $\omega$ sia esatta è che sia chiusa. Pertanto, deve essere

$$\varphi(x)\,\mathrm{sen}(y) = \varphi''(x)\,\mathrm{sen}(y)\,,$$

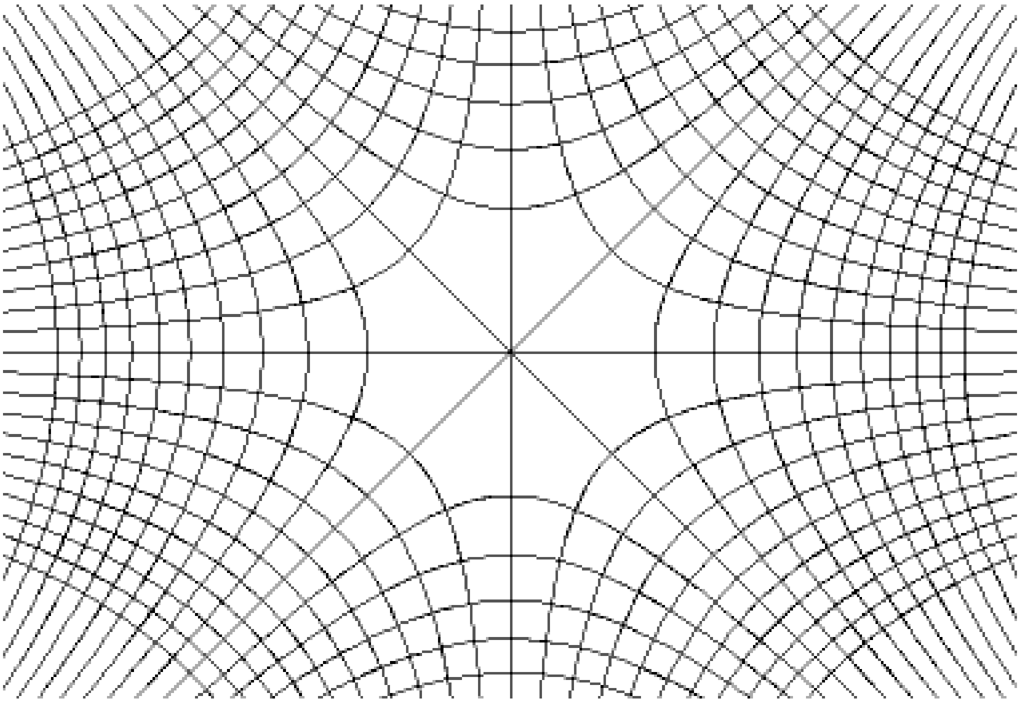
ovvero $\varphi''(x) = \varphi(x)$, da cui $\varphi(x) = A\,\mathrm{e}^x + B\,\mathrm{e}^{-x}$, con $A$ e $B$ costanti *reali* (che scegliamo diverse da $(0,0)$ se vogliamo $\varphi$ non nulla). Per determinare una funzione $f(z)$ di cui $u$ sia la parte reale, prendiamo $A = 1$ e $B = 0$ e troviamo $u(x,y) = \mathrm{e}^x\,\mathrm{sen}(y)$, da cui (a meno di costanti arbitrarie) $v(x,y) = -\mathrm{e}^x\,\cos(y)$. Pertanto $f(z) = \mathrm{e}^x\,(\mathrm{sen}(y) - i\,\cos(x)) = -i\,\mathrm{e}^z$.

**4)** Sia $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ una funzione olomorfa. Dimostrare che (per ogni $c_1$ e $c_2$) le curve di livello $u(x,y) = c_1$ e $v(x,y) = c_2$ sono ortogonali tra di loro dove si intersecano. Disegnare le curve di livello nel caso $f(z) = z^2$.

In ogni punto della curva di livello $u(x,y) = c_1$ il gradiente $\nabla u(x,y) = (u_x, u_y)$ è parallelo alla normale alla curva, e lo stesso vale per il gradiente $\nabla v(x,y) = (v_x, v_y)$. Dal momento che, per le equazioni di Cauchy-Riemann,

$$(\nabla u(x,y)|\nabla v(x,y)) = u_x(x,y)\,v_x(x,y) + u_y(x,y)\,v_y(x,y) = v_y(x,y)\,v_x(x,y) - v_x(x,y)\,v_y(x,y) = 0\,,$$

se $(x, y)$ appartiene ad una curva di livello di $u$ e ad una di $v$, ne segue che le normali sono ortogonali, e quindi le (tangenti, ovvero le) curve sono ortogonali. Si veda la figura per il caso $f(z) = z^2$, quando $u(x, y) = x^2 - y^2$ e $v(x, y) = 2xy$.



**5)** Sia $n$ in $\mathbf{Z}$; calcolare

$$\int_\gamma \frac{1}{z^n}\,, \qquad \gamma(t) = \mathrm{e}^{i\,\theta}\,,\ \theta \in [0, 2\pi)\,.$$

Dal momento che, lungo la curva, $z^n = (\mathrm{e}^{i\theta})^n = \mathrm{e}^{i\,n\theta}$, mentre il differenziale vale $i\,\mathrm{e}^{i\,\theta}$ si ha

$$\int_\gamma \frac{1}{z^n} = \int_0^{2\pi} i\,\mathrm{e}^{-i\,n\theta}\,\mathrm{e}^{i\,\theta}\,d\theta = i\int_0^{2\pi} [\cos((n-1)\,\theta) - i\,\mathrm{sen}((n-1)\,\theta)]\,d\theta = \begin{cases} 2\pi\,i & \text{se } n = 1, \\ 0 & \text{se } n \neq 1. \end{cases}$$

Ci si poteva logicamente attendere il risultato (almeno per $n > 0$, dal momento che l'integrale è (a meno di un fattore $\frac{2\pi\,i}{(n-1)!}$) il valore della derivata $(n-1)$-sima nell'origine della funzione olomorfa $f(z) \equiv 1$.

**6)** Sia $n$ in $\mathbf{N}$; sia

$$I_n = i\int_0^{2\pi} [2\,\cos(\theta)]^{2n}\,d\theta\,.$$

Dimostrare che si ha

$$I_n = \int_\gamma \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{1}{z}\,, \qquad \gamma(t) = \mathrm{e}^{i\,\theta}\,,\ \theta \in [0, 2\pi)\,.$$

Calcolare successivamente $I_n$ usando l'esercizio precedente e la formula del binomio di Newton.

Lungo la curva $\gamma$ si ha, ricordando che $2\cos(\theta) = \mathrm{e}^{i\,\theta} + \mathrm{e}^{-i\,\theta}$,

$$I_n = \int_0^{2\pi} [\mathrm{e}^{i\,\theta} + \mathrm{e}^{-i\,\theta}]\,i\,d\theta = i\int_0^{2\pi} [2\,\cos(\theta)]^{2n}\,d\theta\,,$$

come volevasi dimostrare. Essendo

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^k \left(\frac{1}{z}\right)^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \left(\frac{1}{z}\right)^{2n-2k},$$

si ha

$$I_n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \int_\gamma \frac{1}{z^{2n+1-2k}}.$$

Per l'esercizio precedente, l'integrale è diverso da zero se e solo se $2n+1-2k=1$, ovvero se e solo se $k=n$. Pertanto,

$$I_n = 2\pi\, i \binom{2n}{n} = 2\pi\, i\, \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

**7)** Calcolare

$$\int_{\gamma_1} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z-i}, \quad \gamma_1(t) = 2\mathrm{e}^{i\,\theta}, \ \theta \in [0,2\pi), \qquad \int_{\gamma_2} \frac{\cos(z)}{z^2}, \quad \gamma_1(t) = \mathrm{e}^{i\,\theta}, \ \theta \in [0,2\pi).$$

Dette $f_1(z) = \operatorname{sen}(z)$ e $f_2(z) = \cos(z)$, si ha (da momento che $\gamma_1$ "gira" intorno a $z_0 = i$ e $\gamma_2$ "gira" intorno a $z_0 = 0$),

$$f_1(i) = \frac{1}{2\pi\, i} \int_{\gamma_1} \frac{f_1(z)}{z-i}, \qquad f_2'(0) = \frac{1}{2\pi\, i} \int_{\gamma_2} \frac{f_2(z)}{z^2}.$$

Pertanto, il primo integrale vale $\pi(\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e})$, mentre il secondo vale 0.

**8)** Calcolare

$$\int_\gamma \frac{z^2+4}{z(z^2+1)}, \quad \gamma(t) = 4\mathrm{e}^{i\,\theta}, \ \theta \in [0,2\pi).$$

La curva $\gamma$ "gira" intorno all'origine, a $z=i$ e a $z=-i$. Inoltre,

$$\frac{z^2+4}{z(z^2+1)} = \frac{4}{z} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{z+i} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{z-i},$$

e quindi

$$\int_\gamma \frac{z^2+4}{z(z^2+1)} = 4\int_\gamma \frac{1}{z} - \frac{3}{2}\int_\gamma \frac{1}{z+i} - \frac{3}{2}\int_\gamma \frac{1}{z-i}.$$

Dal momento che tutti e tre gli integrali valgono $2\pi\, i$ (essendo uguali a $2\pi\, i$ volte il valore della funzione $g(z) \equiv 1$ in 0, $i$ e $-i$),

$$\int_\gamma \frac{z^2+4}{z(z^2+1)} = 2\pi\, i.$$

Alternativamente, si può osservare che l'integrale di $\frac{z^2+4}{z(z^2+1)}$ lungo $\gamma$ è uguale a

$$\int_{\gamma_1} \frac{z^2+4}{z^2+1}\,\frac{1}{z} + \int_{\gamma_2} \frac{z^2+4}{z(z+i)}\,\frac{1}{z-i} + \int_{\gamma_3} \frac{z^2+4}{z(z-i)}\,\frac{1}{z+i},$$

dove $\gamma_1$, $\gamma_2$ e $\gamma_3$ sono tre circonferenze centrate in 0, $i$ e $-i$ rispettivamente. Pertanto, per il teorema di Cauchy,

$$\int_{\gamma_1} \frac{z^2+4}{z^2+1}\,\frac{1}{z} = 2\pi\, i\, \left.\frac{z^2+4}{z^2+1}\right|_{z=0} = 8\pi\, i,$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{z^2+4}{z(z+i)}\,\frac{1}{z-i} = 2\pi\, i\, \left.\frac{z^2+4}{z(z+i)}\right|_{z=i} = -3\pi\, i,$$

$$\int_{\gamma_3} \frac{z^2+4}{z(z-i)}\,\frac{1}{z+i} = 2\pi\, i\, \left.\frac{z^2+4}{z(z-i)}\right|_{z=-i} = -3\pi\, i.$$

**9)** Calcolare

$$g(z_0) = \int_\gamma \frac{\overline{z}}{z - z_0}\,, \qquad \gamma(t) = z_0 + \mathrm{e}^{i\,\theta}\,,\ \theta \in [0, 2\pi)\,.$$

Perché la funzione $g$ *non* è olomorfa?

Essendo, lungo la curva $\gamma$, $\overline{z} = \overline{z_0} + \mathrm{e}^{-i\,\theta}$, si ha

$$g(z_0) = \int_\gamma \frac{\overline{z}}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} i\,[\overline{z_0} + \mathrm{e}^{-i\,\theta}]\,d\theta = 2\pi\,i\overline{z_0}\,.$$

Pertanto, $g(z_0) = 2\pi\,i\overline{z_0}$ si può rappresentare come integrale, esattamente come ogni funzione olomorfa. La differenza con le funzioni olomorfe è dovuta al fatto che il percorso di integrazione *dipende* anche esso da $z_0$ e pertanto non si può derivare "impunemente" sotto il segno di integrale per ottenere una rappresentazione della derivata di $g$ (che, infatti, non esiste).

**10)** Sia $\alpha > 0$ e sia $V_\alpha$ lo spazio vettoriale (su $\mathbf{C}$) definito da

$$V_\alpha = \{f : \mathbf{C} \to \mathbf{C} \text{ olomorfe tali che esiste } C > 0 \text{ per il quale } |f(z)| \leq C(1 + |z|)^\alpha \text{ per ogni } z \text{ in } \mathbf{C}\}\,.$$

Calcolare la dimensione di $V_\alpha$ su $\mathbf{C}$.

Sia $k$ intero maggiore di $\alpha$. Allora, essendo $f$ olomorfa,

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi\,i} \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\,,$$

dove $\gamma_R$ è la circonferenza di centro $z_0$ e raggio $R$. Pertanto

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z)|}{R^{k+1}}\,R\,d\theta \leq C\,k! \frac{(1 + R)^\alpha}{R^k}\,.$$

Facendo tendere $R$ ad infinito, si ottiene che $f^{(k)}(z_0) = 0$ per ogni $k > \alpha$ e quindi $f$ è un polinomio di grado minore di $k$. Detta $K$ la parte intera di $\alpha$, allora

$$V_\alpha = \{\text{polinomi di grado minore o uguale a } K\}\,,$$

e quindi la dimensione di $V_\alpha$ è $K + 1$.

**Esercizi 9 – 5 dicembre 2001**

**1)** Sia $u(x, y) = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2$, con $a_i$ in $\mathbf{R}$. Determinare tutte le funzioni olomorfe $f$ di cui $u$ è la parte reale.

Affinché esista $v$ tale che $u + iv$ sia olomorfa, deve essere $v_y = u_x = 2a_0x + 2a_1y$ e $v_x = -u_y = -2a_1x - 2a_2y$. Integrando la prima, si trova

$$v(x, y) = 2a_0xy + a_1y^2 + g(x)\,,$$

e derivando rispetto a $x$,

$$v_x(x, y) = 2a_0y + g'(x) = -2a_1x - 2a_2y\,,$$

da cui deve essere $a_0 = -a_2$ e $g(x) = -a_1x^2 + c_1$, con $c_1$ costante arbitraria in $\mathbf{R}$. In definitiva,

$$v(x, y) = -a_1x^2 + 2a_0xy + a_1y^2 + c_1\,.$$

Pertanto,

$$\begin{aligned} f(z) = u(x, y) + iv(x, y) &= a_0x^2 + 2a_1xy - a_0y^2 + i(-a_1x^2 + 2a0xy + a_1y^2 + c_1) \\ &= a_0[x^2 - y^2 + 2ixy] + a_1\, i[x^2 - y^2 + 2ixy] + i\, c_1\,, \end{aligned}$$

ovvero $f(z) = (a_0 + ia_1)\, z^2 + i\, c_1$ e, per l'arbitrarietà di $a_0$ e $a_1$, $f(z) = c_0\, z^2 + i\, c_1$, con $c_0$ in $\mathbf{C}$ e $c_1$ in $\mathbf{R}$.

**2)** Siano

$$f(z) = \frac{z^2 - 2}{z(z + 2)}\,, \qquad \gamma(\theta) = \frac{\theta + 1}{3}\, \mathrm{e}^{i\,\theta}\,, \quad \theta \in [0, 2\pi]\,.$$

Calcolare

$$\int_\gamma f(z)\,.$$

La curva $\gamma$ non è chiusa: costruiamo allora, a partire da $\gamma$, la curva chiusa $\bar{\gamma}$ ottenuta aggiungendo il segmento $S$ dell'asse reale di estremi $\frac{1}{3}$ e $\frac{2\pi+1}{3}$ (si veda la figura).

Per il teorema di Cauchy, essendo
$$f(z) = \frac{z^2-2}{z+2}\,\frac{1}{z}\,,$$
e dal momento che $z = -2$ è fuori dalla parte di piano racchiusa da $\bar{\gamma}$, mentre l'origine è dentro,
$$-1 = \left.\frac{z^2-2}{z+2}\right|_{z=0} = \frac{1}{2\pi\, i}\int_{\bar{\gamma}} \frac{z^2-2}{z+2}\,\frac{1}{z} = \frac{1}{2\pi\, i}\left(\int_{\gamma} \frac{z^2-2}{z(z+2)} - \int_S \frac{z^2-2}{z^2+2z}\right).$$
Pertanto,
$$\int_{\gamma} f(z) = -2\pi\, i + \int_S \frac{z^2-2}{z^2+2z} = -2\pi\, i + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2\pi+1}{3}} \frac{t^2-2}{t^2+2}\,dt\,,$$
con l'ultimo integrale di calcolo immediato.

**3)** Sia $Q = [-1,1]\times[-1,1]$. Verificare che la serie
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos(kz)}{3^k}\,,$$
converge uniformemente in $Q$ e calcolare la somma della serie. Successivamente, determinare il più grande insieme di convergenza puntuale della serie.

Per definizione, $\cos(kz) = \frac{\mathrm{e}^{ikz}+\mathrm{e}^{-ikz}}{2}$, e quindi
$$f(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ikz}}{3^k} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ikz}}{3^k}\,.$$
Ponendo $\xi = \mathrm{e}^{iz}$ nella prima, e $\eta = \mathrm{e}^{-iz}$ nella seconda, otteniamo due serie di potenze,
$$f(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\xi^k}{3^k} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\eta^k}{3^k}\,.$$
La prima converge per $|\xi| < 3$, ovvero per $(x,y)$ tale che $\mathrm{e}^{-y} < 3$, la seconda per $|\eta| < 3$, ovvero per $(x,y)$ tale che $\mathrm{e}^{y} < 3$. Pertanto, si ha convergenza puntuale in $\mathbf{R}\times(-\ln(3),\ln(3))$, e convergenza uniforme sui compatti contenuti, ed in particolare su $Q$. Inoltre, essendo $\xi+\eta = 2\cos(z)$ e $\xi\,\eta = 1$,
$$f(z) = f(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{\xi}{3}} + \frac{1}{1-\frac{\eta}{3}}\right) = \frac{3}{2}\,\frac{6-(\xi+\eta)}{9-3(\xi+\eta)+\xi\,\eta} = \frac{3}{2}\,\frac{6-2\cos(z)}{10-6\cos(z)} = \frac{9-3\cos(z)}{10-6\cos(z)}\,.$$
Si noti che $f$ non è definita per $z = \pm i\,\ln(3)$, in quanto $\cos(\pm i\,\ln(3)) = \frac{5}{3}$.

**4)** Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali tendente a zero e sia
$$u(x,y) = \Re\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\,\mathrm{e}^{ikz}\right).$$
Verificare che $u$ è armonica all'interno dell'insieme di definizione.

Se definiamo $\xi = \mathrm{e}^{iz}$, la serie diventa la serie di potenze
$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\,\xi^k\,.$$

Dal momento che $a_n$ tende a zero, definitivamente $|a_n| \leq 1$, e quindi $\sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$; pertanto,

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1\,,$$

da cui segue che il raggio di convergenza della serie di potenze è più grande di 1. La serie converge allora "almeno" per $|\xi| = |\mathrm{e}^{iz}| = \mathrm{e}^{-y} < 1$, ovvero per ogni $x$ in $\mathbf{R}$ e per $y > 0$. All'interno dell'insieme dove la serie converge, comunque, la somma della serie è una funzione olomorfa. Scrivendo $\mathrm{e}^{ikz} = \mathrm{e}^{-ky}\,(\cos(kx) + i\mathrm{sen}(kx))$, allora, essendo $a_k$ reale,

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\,\cos(kx)\,\mathrm{e}^{-ky}\,,$$

e $u$ è armonica come parte reale di una funzione olomorfa.

**5)** Sia $g$ in $C^1([-\pi,\pi])$, pari e tale che

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\,g(x)\,dx = \frac{1}{2^k}\,.$$

Trovare una funzione $u$ armonica in $[-\pi,\pi]\times[0,+\infty)$ tale che $u(x,0) = g(x)$.

La funzione $g$ è sviluppabile in serie di Fourier in $[-\pi,\pi]$, e si ha (aggiungendo $\frac{1}{2}$ per rendere compatta la formula)

$$g(x) + \frac{1}{2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\,\cos(kx)\,,$$

con convergenza uniforme della serie. Definiamo

$$u(x,y) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\,\cos(kx)\,\mathrm{e}^{-ky}\,,$$

in modo tale che $u(x,0) = g(x)$. Per l'esercizio precedente, la serie è la parte reale di una serie che converge per $|\mathrm{e}^{iz}| < 2$, ovvero per $x$ qualsiasi e $y > \ln(2)$, ad una funzione olomorfa. Pertanto, $u$ è armonica in $[-\pi,\pi]\times[0,+\infty)$.

**6)** Classificare le singolarità delle funzioni

$$\frac{\mathrm{sen}(z)}{z}\,,\quad \frac{\cos(z)}{z}\,,\quad \frac{1}{(2-z)^3}\,,\quad \frac{z^2}{1+z}\,,\quad z\,\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\,.$$

$$\underset{\text{eliminabile}}{\frac{\mathrm{sen}(z)}{z}}\,,\quad \underset{\text{polo di ordine 1}}{\frac{\cos(z)}{z}}\,,\quad \underset{\text{polo di ordine 3}}{\frac{1}{(2-z)^3}}\,,\quad \underset{\text{polo di ordine 1}}{\frac{z^2}{1+z}}\,,\quad \underset{\text{essenziale}}{z\,\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}\,.$$

**7)** Sviluppare $f(z) = \frac{1}{z^3-z^4}$ in serie di Laurent di potenze di $z$, prima nel cerchio di centro l'origine e raggio 1 (privato dell'origine) e poi fuori dal cerchio di centro l'origine e raggio 1.

Per il primo sviluppo, scriviamo

$$f(z) = \frac{1}{z^3}\,\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z^3}\sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \sum_{k=-3}^{+\infty} z^k\,,$$

mentre per il secondo

$$f(z) = \frac{1}{z^4}\,\frac{1}{\frac{1}{z}-1} = -\frac{1}{z^4}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{z^k} = -\sum_{k=4}^{+\infty}\frac{1}{z^k}\,.$$

**8)** Sviluppare $f(z) = \frac{\mathrm{e}^z}{(z+1)^2}$ in serie di Laurent di potenze di $z+1$.

Se definiamo $g(z) = \mathrm{e}^z$, dal momento che $g^{(k)}(-1) = \mathrm{e}^{-1}$ per ogni $k$, si ha

$$\mathrm{e}^z = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}\,(z+1)^k\,,$$

e quindi

$$f(z) = \sum_{k=-2}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}\,(z+1)^k\,.$$

**9)** Sia, per $y$ reale e $t>0$, $t^{iy} = \mathrm{e}^{iy\,\ln(t)} = \cos(y\,\ln(t)) + i\,\mathrm{sen}(y\,\ln(t))$, e sia

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,t^{z-1}\,dt\,,\qquad z\in\mathbf{C}\,.$$

Dimostrare che $\Gamma$ è ben definita per $\Re(z)>0$, e che $\Gamma(z) = (z-1)\,\Gamma(z-1)$; calcolare $\Gamma(n)$ per ogni $n$ in $\mathbf{N}$.

Si ha $|t^{z-1}| = |t^{x-1}\,t^{iy}| = t^{x-1}$, dal momento che $|t^{iy}| = 1$. Pertanto, $|\mathrm{e}^{-t}\,t^{z-1}| = e^{-t}\,t^{x-1}$. Essendo $x = \Re(z) > 0$, la funzione $e^{-t}\,t^{x-1}$ è integrabile vicino a 0, mentre lo è a $+\infty$ qualsiasi sia $x$. Pertanto, essendo $|\mathrm{e}^{-t}\,t^{z-1}|$ in $L^1((0,+\infty))$ se $x>0$, la funzione $\Gamma$ è ben definita per $\Re(z)>0$. Si ha poi, integrando per parti,

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,t^{z-1}\,dt = -\mathrm{e}^{-t}\,t^{z-1}\Big|_{t=0}^{t=+\infty} + (z-1)\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,t^{z-2}\,dt = (z-1)\,\Gamma(z-1)\,.$$

Essendo (come si verifica facilmente) $\Gamma(1) = 1$, dalla relazione precedente si ricava $\Gamma(n) = (n-1)!$.

**10)** Siano

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^z}\,,\qquad \zeta_{\mathrm{a}}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^z}\,.$$

Dimostrare che la serie che definisce $\zeta$ converge puntualmente per $\Re(z)>1$, totalmente per $\Re(z)\geq R>1$; che la serie che definisce $\zeta_{\mathrm{a}}$ converge uniformemente per $\Re(z)\geq R>0$; dimostrare che, se $\Re(z)>1$, allora

$$\zeta_{\mathrm{a}}(z) = \zeta(z) - \frac{2}{2^z}\,\zeta(z)\,,$$

e che pertanto è possibile prolungare analiticamente $\zeta$ per $\Re(z)>0$, $z\neq 1$, definendo

$$\zeta(z) = \frac{\zeta_{\mathrm{a}}(z)}{1-2^{1-z}}\,.$$

Infine, dimostrare che se $\zeta(z_0) = 0$, e $\Im(z_0)\neq 0$, allora $\Re(z_0) = \frac{1}{2}$.

Si ha $|n^z| = |n^x\,n^{iy}| = n^x$. Pertanto, se $\Re(z)>1$, la serie dei moduli è uguale a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}\,,$$

che converge (come serie armonica generalizzata con esponente $x > 1$). Inoltre, essendo

$$\sup_{[R,+\infty)} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n^R}\,,$$

la serie converge totalmente se $\Re(z) \geq R > 1$. Per quanto riguarda la seconda serie, se $\Re(z) \geq R > 0$, allora

$$\sup_{[R,+\infty)} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n^R}\,,$$

che è una successione decrescente a zero. Per il criterio di Leibnitz per serie di funzioni a segni alterni, la serie converge uniformemente. Ovviamente, $\zeta$ e $\zeta_{\rm a}$ sono olomorfe per $\Re(z) \geq R > 1$ e $\Re(z) \geq R > 0$ rispettivamente. Sia ora $z$ tale che $\Re(z) > 1$. Allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(2n)^z} = \left(1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{4^z} + \ldots\right) - \left(\frac{2}{2^z} + \frac{2}{4^z} + \frac{2}{6^z} + \ldots\right) = 1 - \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} - \frac{1}{4^z} + \ldots\,,$$

e i passaggi sono leciti perché entrambe le serie sono assolutamente convergenti. Pertanto,

$$\zeta_{\rm a}(z) = \zeta(z) - \frac{2}{2^z}\,\zeta(z)\,,$$

e da questa formula si ottiene il prolungamento analitico di $\zeta$ per $0 < \Re(z) \leq 1$ (tolto $z = 1$).

L'ultima domanda è la cosiddetta **ipotesi di Riemann**: il fatto che tutti gli zeri non reali di $\zeta$ (detta **funzione zeta di Riemann**) abbiano parte reale $\frac{1}{2}$ non è ancora stato dimostrato (anche se si sa che è vero per i primi 1500000001 zeri); dopo che Wiles ha dimostrato l'Ultimo Teorema di Fermat nel 1994, è probabilmente il più importante problema aperto della matematica...

Una seconda rappresentazione (significativa) della funzione $\zeta$ è la seguente (dovuta ad Eulero):

$$\zeta(z) = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - p^{-z}}\,.$$

Infatti,

$$\frac{1}{1 - p^{-z}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{p^z}\right)^k\,,$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - p^{-z}} &= \left(\sum_{k_1=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^z}\right)^{k_1}\right) \left(\sum_{k_2=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3^z}\right)^{k_2}\right) \left(\sum_{k_3=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{5^z}\right)^{k_3}\right) \cdots \\
&= \left(1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{4^z} + \ldots\right) \left(1 + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{9^z} + \ldots\right) \left(1 + \frac{1}{5^z} + \frac{1}{25^z} + \ldots\right) \\
&= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cdots + \frac{1}{2^z} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cdots + \frac{1}{3^z} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cdots + \frac{1}{4^z} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cdots + \frac{1}{5^z} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cdots + \ldots
\end{aligned}$$

cioè proprio $\zeta(z)$, dal momento che ogni numero $n$ si può esprimere in maniera unica come prodotto di primi. Se, poi, calcoliamo il logaritmo di $\zeta(z)$, abbiamo, detto $\pi(x)$ = numero dei numeri primi minori o uguali a $x$ (ad esempio, $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 2 = \pi(\pi)$, $\pi(30) = 10$ (se non ho sbagliato a contare)), si ha

$$\ln(\zeta(z)) = z \int_2^{+\infty} \frac{\pi(x)}{x\,(x^z - 1)}\,dx\,,$$

cosicché è (nuovamente) evidente il legame tra la $\zeta$ di Riemann ed i numeri primi.

**Esercizi 10 – 12 dicembre 2001**

**1)** Sia $n$ in $\mathbf{N}$; calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}\,.$$

La funzione $f(z) = \frac{1}{1+z^{2n}}$ ha, nel semipiano $\Im(z) \geq 0$, esattamente $n$ radici date da

$$z_k = \mathrm{e}^{i\,\frac{(2k+1)\pi}{2n}}\,, \qquad k = 0, \ldots, n-1\,,$$

e tali che

$$\mathrm{Res}[f(z), z_k] = \frac{1}{2n\,z_k^{2n-1}} = -\frac{z_k}{2n}\,,$$

dal momento che $z_k^{2n} = -1$. Pertanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = -\frac{\pi}{n} i \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{i\,\frac{(2k+1)\pi}{2n}} = -\frac{\pi}{n}\, i\, \mathrm{e}^{i\,\frac{\pi}{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{i\,\frac{\pi}{n}}\right)^k = -\frac{\pi}{n}\, i\, \mathrm{e}^{i\,\frac{\pi}{2n}}\, \frac{1-\mathrm{e}^{i\,\frac{n\pi}{n}}}{1-\mathrm{e}^{i\,\frac{\pi}{n}}} = \frac{\frac{\pi}{n}}{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\,.$$

**2)** Si $P(x)$ un qualsiasi polinomio di grado 2 con due radici reali. Calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{(x^2+4)\,(x^2-2x+2)}\,.$$

Sia $f(z) = \frac{P(z)}{(z^2+4)\,(z^2-2x+2)}$. Allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{(x^2+4)\,(x^2-2x+2)} = 2\pi\, i \sum_{k=1}^{2} \mathrm{Res}[f(z), z_k]\,,$$

dove $z_1 = 2i$ e $z_2 = 1+i$ (gli unici poli di $f$ nel semipiano $\Im(z) \geq 0$). Eseguendo i calcoli, si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{(x^2+4)\,(x^2-2x+2)} = 2\pi\, i \left(\frac{P(2i)}{16-8i} + \frac{P(1+i)}{8i-4}\right) = \frac{\pi}{20}\,(8\alpha + 2\beta + 3\gamma)\,,$$

se $P(x) = \alpha\, x^2 + \beta\, x + \gamma$.

**3)** Siano $a$ e $b$ reali e maggiori di 1. Calcolare

$$\int_0^{2\pi} \frac{a + \mathrm{sen}(\theta)}{b + \cos(\theta)}\, d\theta\,.$$

Effettuando la sostituzione $z = \mathrm{e}^{i\theta}$, si ha

$$\int_0^{2\pi} \frac{a + \mathrm{sen}(\theta)}{b + \cos(\theta)}\, d\theta = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z}\, \frac{a + \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)}{b + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} = -\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\, \frac{z^2 + 2aiz - 1}{z^2 + 2bz + 1}\,.$$

Gli zeri del denominatore sono $z = 0$ e $_-z_+ = -b \pm \sqrt{b^2-1}$; degli ultimi due, solo $z_+ = \sqrt{b^2-1} - b$ è all'interno di centro l'origine e raggio 1; pertanto

$$\int_0^{2\pi} \frac{a + \mathrm{sen}(\theta)}{b + \cos(\theta)}\, d\theta = -2\pi\, i\,(\mathrm{Res}[g(z), 0] + \mathrm{Res}[g(z), z_+])\,, \qquad g(z) = \frac{1}{z}\, \frac{z^2 + 2aiz - 1}{z^2 + 2bz + 1}\,.$$

Svolgendo i calcoli, si ha

$$\mathrm{Res}[g(z),0] = -1\,, \qquad \mathrm{Res}[g(z),z_+] = 1 + \frac{ai}{\sqrt{b^2-1}}\,,$$

cosicché

$$\int_0^{2\pi} \frac{a+\mathrm{sen}(\theta)}{b+\cos(\theta)}\,d\theta = \frac{2\pi\,a}{\sqrt{b^2-1}}\,.$$

**4)** Sia $\gamma = +\partial B_2(0)$. Calcolare

$$\int_\gamma \frac{z^5+3}{(z^2+1)^3\,(z-3)^2}\,.$$

All'interno di $\gamma$ la funzione integranda ha 2 poli ($\pm i$), entrambi di ordine 3. Fuori, invece, c'è $z=3$, che è polo di ordine 2. Conviene allora calcolare l'integrale come

$$\int_\gamma \frac{z^5+3}{(z^2+1)^3\,(z-3)^2} = -2\pi\,i(\mathrm{Res}[f(z),3] + \mathrm{Res}[f(z),\infty])\,.$$

Ora

$$\mathrm{Res}[f(z),3] = -\frac{189}{5000}\,,$$

mentre $\mathrm{Res}[f(z),\infty] = 0$ (come si vede facendo tendere $R$ ad infinito nell'integrale di $f$ lungo la circonferenza di centro l'origine e raggio $R$, che si comporta come $R^{-2}$), e quindi

$$\int_\gamma \frac{z^5+3}{(z^2+1)^3\,(z-3)^2} = \frac{189\pi\,i}{2500}\,.$$

**5)** Calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+1}\,dx\,.$$

Si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+1}\,dx = \Im\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ix}}{x^2+1}\,dx\right)\,.$$

Se definiamo $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{iz}}{z^2+1}$, allora $f$ è olomorfa nel semipiano $\Im(z) \geq 0$ tranne $z = i$. Pertanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ix}}{x^2+1}\,dx = 2\pi\,i\,\mathrm{Res}[f(z),i] = \frac{\pi}{\mathrm{e}}\,,$$

e questo è anche il risultato dell'integrale.

**6)** Sia $r > 0$ e sia $\gamma_r = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, dove $\gamma_1$ è il segmento tra $(0,0)$ e $(r,0)$, $\gamma_2$ è l'arco di circonferenza $r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, con $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, e $\gamma_3$ è il segmento tra $r\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$ e l'origine. Ricordando che

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,,$$

calcolare

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{ix^2}\,dx\,,$$

integrando $\mathrm{e}^{iz^2}$ lungo $\gamma_r$. Ottenere il valore dell'integrale da 0 ad infinito di $\cos(x^2)$.

Essendo $e^{iz^2}$ olomorfa, si ha

$$0 = \int_{\gamma_r} e^{iz^2} = \int_{\gamma_1} e^{iz^2} + \int_{\gamma_2} e^{iz^2} + \int_{\gamma_3} e^{iz^2} \,.$$

Si ha

$$\int_{\gamma_1} e^{iz^2} = \int_0^r e^{ix^2}\, dx\,,$$

e, parametrizzando $\gamma_3$ come $t\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$ con $t$ tra $r$ e 0, si ha

$$\int_{\gamma_3} e^{iz^2} = \int_r^0 e^{it^2\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) dt = -\int_0^r e^{-t^2} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) dt\,,$$

e quindi

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_3} e^{iz^2} = -\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Infine,

$$\int_{\gamma_2} e^{iz^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{ir^2\, e^{2i\theta}}\, i\, r\, e^{i\theta}\, d\theta = r\, i \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-r^2 \mathrm{sen}(2\theta) + i\,(r^2\cos(2\theta)+\theta)}\, d\theta\,.$$

Pertanto,

$$\left|\int_{\gamma_2} e^{iz^2}\right| \le r \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-r^2\mathrm{sen}(2\theta)}\, d\theta\,.$$

Ora $\mathrm{sen}(2\theta) \ge \frac{4}{\pi}\theta$ per ogni $\theta$ tra 0 e $\frac{\pi}{4}$, per cui

$$\left|\int_{\gamma_2} e^{iz^2}\right| \le r \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{4r^2\,\theta}{\pi}}\, d\theta = r\left(-\frac{e^{-\frac{4r^2\,\theta}{\pi}}}{\frac{4r^2}{\pi}}\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{\pi}{4r}\,(1 - e^{-r^2})\,,$$

che tende a zero per $r$ tendente ad infinito. Pertanto,

$$\int_0^{+\infty} e^{ix^2}\, dx = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,,$$

da cui segue

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\, dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\,.$$

**7)** Sia $P(z) = z^3 + 2z^2 + 5z + 1$. Calcolare il numero di radici di $P(z)$ in $B_1(0)$ ed in $B_4(0)$.

Siano $f(z) = 5z$ e $\varphi(z) = z^3 + 2z^2 + 1$; dal momento che se $|z| = 1$ si ha $|f(z)| = 5 > 4 \ge |\varphi(z)|$, allora $P$ ha un solo zero in $B_1(0)$. Siano ora $f(z) = z^3$ e $\varphi(z) = 2z^2 + 5z + 1$; se $|z| = 4$, allora $|f(z)| = 64 > 53 \ge |\varphi(z)|$, e quindi $P$ ha tutti e tre gli zeri in $B_4(0)$.

**8)** Calcolare il numero di zeri di $z^3 + \mathrm{sen}(z)$ in $B_2(0)$. Dimostrare che $z^k + \mathrm{sen}(z)$ ha $k$ zeri in $B_R(0)$ se $k > \frac{R}{\ln(R)}$.

Si ha

$$|\mathrm{sen}(z)| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| \le \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|z|^{2k+1}}{(2k+1)!} \le \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|z|^k}{k!} = e^{|z|}\,.$$

Pertanto, dette $f(z) = z^3$ e $\varphi(z) = \mathrm{sen}(z)$, se $|z| = 2$ si ha $|f(z)| = 8 > \mathrm{e}^2 \geq |\varphi(z)|$. Pertanto $z^3 + \mathrm{sen}(z)$ ha tre zeri in $B_2(0)$. La risposta alla seconda domanda segue osservando che $R^k > \mathrm{e}^R$ se $k > \frac{R}{\ln(R)}$.

**9)** Dimostrare che non esiste una funzione $f : \overline{B_1(0)} \to \partial B_1(0)$ olomorfa e tale che $f(z) = z$ per ogni $z$ in $\partial B_1(0)$. Suggerimento: se esistesse, allora $g(z) = -f(z)$ sarebbe...

...una funzione olomorfa da $\overline{B_1(0)}$ a $\overline{B_1(0)}$. Per il Teorema di Brouwer, esisterebbe $z_0$ in $\overline{B_1(0)}$ tale che $g(z_0) = z_0$. Essendo in realtà $g$ una funzione a valori in $\partial B_1(0)$, allora $z_0$ sarebbe in $\partial B_1(0)$ e

$$z_0 = g(z_0) = -f(z_0) = -z_0\,,$$

da cui $z_0 = 0$, assurdo.

**10)** Sia

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z} = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - p^{-z}}\,.$$

Dimostrare che, se $z = x$ è reale maggiore di 1,

$$\ln(\zeta(x)) = x \int_2^{+\infty} \frac{\pi(t)}{t(t^x - 1)}\, dt\,,$$

dove $\pi(t)$ è il numero di numeri primi minori o uguali a $t$. Dimostrare (usando $\zeta(1) = +\infty$) che

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\pi(t)\,[\ln(t)]^\alpha}{t} = +\infty\,, \qquad \forall \alpha > 1\,.$$

Dalla definizione (e dalle proprietà del logaritmo), si ha

$$\ln(\zeta(x)) = -\sum_{p \text{ primo}} \ln\left(1 - \frac{1}{p^x}\right)\,.$$

Ora, come si vede immediatamente derivando rispetto a $t$ la funzione $t \mapsto \ln(1 - t^{-x})$,

$$-\ln\left(1 - \frac{1}{p^x}\right) = \int_p^{+\infty} \frac{x}{t\,(t^x - 1)}\, dt = \int_2^{+\infty} \frac{x}{t\,(t^x - 1)}\, \chi_{(p,+\infty)}(t)\, dt\,,$$

e pertanto (per il teorema di convergenza monotona),

$$\ln(\zeta(x)) = \int_2^{+\infty} \frac{x}{t\,(t^x - 1)} \left(\sum_{p \text{ primo}} \chi_{(p,+\infty)}(t)\right) dt\,,$$

da cui la tesi, essendo (come si verifica immediatamente)

$$\sum_{p \text{ primo}} \chi_{(p,+\infty)}(t) = \pi(t)\,.$$

Se esistesse $M > 0$ tale che

$$0 \leq \frac{\pi(t)\,[\ln(t)]^\alpha}{t} \leq M\,, \qquad \forall t \geq 2\,,$$

allora

$$\frac{\pi(t)}{t(t-1)} \leq \frac{M}{(t-1)\,[\ln(t)]^\alpha} \in L^1((2, +\infty))\,,$$

e quindi $\zeta(1)$ sarebbe finito.

**Esercizi 11 – 19 dicembre 2001**

**1)** Calcolare

$$\mathcal{F}\left(\frac{\cos(x)}{1+x^2}\right)(\xi)\,.$$

Scriviamo $\cos(x) = \frac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2}$, cosicché

$$\mathcal{F}\left(\frac{\cos(x)}{1+x^2}\right)(\xi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} \frac{\mathrm{e}^{-i\xi x+ix}}{1+x^2}\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} \frac{\mathrm{e}^{-i\xi x-ix}}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(\xi-1) + \frac{1}{2}\,\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(\xi+1)\,.$$

Siccome

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \pi\,\mathrm{e}^{-|\xi|}\,,$$

si ha

$$\mathcal{F}\left(\frac{\cos(x)}{1+x^2}\right)(\xi) = \frac{\pi\,(\mathrm{e}^{-|\xi-1|}+\mathrm{e}^{-|\xi+1|})}{2}\,.$$

**2)** Calcolare (nell'ordine)

$$\mathcal{F}\left(\frac{x}{(1+x^2)^2}\right)(\xi)\,,\qquad \mathcal{F}\left(\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\right)(\xi)\,.$$

Si ha

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\,.$$

Pertanto,

$$\mathcal{F}\left(\frac{x}{(1+x^2)^2}\right)(\xi) = -\frac{1}{2}\,\mathcal{F}\left(\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right) = -\frac{1}{2}\,\mathcal{F}\left(\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'\right) = -\frac{i\xi\,\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-|\xi|}\,.$$

Inoltre,

$$\mathcal{F}\left(\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\right)(\xi) = \mathcal{F}\left(x\,\frac{x}{(1+x^2)^2}\right)(\xi) = i\,\left(\mathcal{F}\left(\frac{x}{(1+x^2)^2}\right)(\xi)\right)' = \frac{\pi}{2}\,(1-|\xi|)\,\mathrm{e}^{-|\xi|}\,.$$

**3)** Calcolare

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{(1+x^2)^2}\right)(\xi)\,.$$

Suggerimento: si usi l'esercizio precedente.

Si ha

$$\frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)'\,,$$

e quindi

$$-2\,\mathcal{F}\left(x\,\frac{1}{(1+x^2)^2}\right)(\xi) = \mathcal{F}\left(\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'\right)(\xi)\,.$$

Pertanto

$$-2i\,\left(\mathcal{F}\left(\frac{1}{(1+x^2)^2}\right)(\xi)\right)' = i\xi\,\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(\xi) = i\,\xi\,\pi\,\mathrm{e}^{-|\xi|}\,.$$

In definitiva,

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{(1+x^2)^2}\right)(\xi) = -\frac{\pi}{2}\,\mathcal{F}\left(\frac{1}{(1+x^2)^2}\right)(0)\int_0^\xi t\,\mathrm{e}^{-|t|}\,dt = \frac{\pi}{2}\,(1+|\xi|)\,\mathrm{e}^{-|\xi|}\,.$$

**4)** Calcolare (nell'ordine)

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^4}\right)(\xi)\,, \qquad \mathcal{F}\left(\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)(\xi)\,.$$

Con lunghi (e faticosi) calcoli, si trova

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^4}\right)(\xi) = \frac{\pi\,\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\xi\,\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\left(\frac{\xi\,\sqrt{2}}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\xi\,\sqrt{2}}{2}\right)\right)\,,$$

se $\xi \geq 0$, e la stessa funzione (calcolata in $-\xi$) se $\xi < 0$. Inoltre, essendo

$$\left(\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)' = -\frac{2x}{1+x^4}\,.$$

Pertanto,

$$-2i\left(\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^4}\right)(\xi)\right)' = -2\,\mathcal{F}\left(x\,\frac{1}{1+x^4}\right) = \mathcal{F}\left(\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)' = i\,\xi\,\mathcal{F}\left(\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)(\xi)\,,$$

da cui

$$\mathcal{F}\left(\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)(\xi) = -\frac{2}{\xi}\left(\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^4}\right)(\xi)\right)'\,.$$

**5)** Sia $u(x) = \max(1-|x|, 0)$. Calcolare (in due modi) $\mathcal{F}(u)(\xi)$.

Osservando che $u'(x) = \chi_{(0,1)} - \chi_{(-1,0)}$, e che

$$i\xi\,\mathcal{F}(u)(\xi) = \mathcal{F}(u')(\xi) = \frac{2-2\cos(\xi)}{i\xi}\,,$$

si ottiene

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \frac{2\cos(\xi)-2}{\xi^2}\,.$$

Allo stesso risultato si arriva calcolando $\mathcal{F}(u)(\xi)$ con la definizione.

**6)** Dimostrare che se $u$ in $L^1(\mathbf{R})$ è pari, allora $\mathcal{F}(u)$ è reale e pari, mentre se $u$ è dispari, allora $\mathcal{F}(u)$ è puramente immaginaria e dispari.

Se $u$ è pari, allora

$$\int_{\mathbf{R}} \operatorname{sen}(\xi\,x)\,u(x) = 0\,,$$

e quindi $\mathcal{F}(u)$ è reale; inoltre,

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{\mathbf{R}} \cos(\xi\,x)\,u(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}} \cos(-\xi\,x)\,u(-x)\,dx = \int_{\mathbf{R}} \cos(-\xi\,x)\,u(x)\,dx = \mathcal{F}(u)(-\xi)\,.$$

Ragionamento analogo vale se $u$ è dispari.

**7)** Trovare una formula risolutiva per l'equazione

$$u'(x) + au(x) = f(x)\,, \qquad a > 0\,,\ f \in L^1(\mathbf{R})\,.$$

Trasformando l'equazione si trova

$$i\,\xi\,\mathcal{F}(u)(\xi) + a\,\mathcal{F}(u)\,\xi = \mathcal{F}(f)(\xi)\,,$$

ovvero

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \frac{\mathcal{F}(f)(\xi)}{i\xi + a}\,.$$

Antitrasformando $\frac{1}{\xi+a}$, si trova

$$v(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \frac{\mathrm{e}^{i\xi\,x}}{i\xi + a}\,d\xi\,.$$

Se $x > 0$, la funzione $g(z) = \frac{1}{iz+a}$ ha un polo in $z = ia$, che si trova nel semipiano $\Im(z) > 0$. Pertanto,

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{\mathrm{e}^{i\xi\,x}}{i\xi + a}\,d\xi = 2\pi\,i\,\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{iz\,x}}{iz + a}, ia\right] = 2\pi\,\mathrm{e}^{-a\,x}\,.$$

Se $x < 0$, la funzione $g(z) = \frac{1}{iz+a}$ non ha poli nel semipiano $\Im(z) < 0$, e pertanto

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{\mathrm{e}^{i\xi\,x}}{i\xi + a}\,d\xi = 0\,.$$

Se $x = 0$, $v$ non è definita. In definitiva, $v(x) = \mathrm{e}^{-ax}\,\chi_{(0,+\infty)}(x)$, e quindi

$$u(x) = \int_{\mathbf{R}} f(y)\,\mathrm{e}^{-a(x-y)}\,\chi_{(0,+\infty)}(x-y)dy = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,\mathrm{e}^{-a(x-y)}\,dy\,.$$

**8)** Trovare una formula risolutiva per l'equazione

$$u''(x) + 2u'(x) + u(x) = f(x)\,, \qquad f \in L^1(\mathbf{R})\,.$$

Trasformando l'equazione, si ha

$$-\xi^2\,\mathcal{F}(u)(\xi) + 2i\xi\,\mathcal{F}(u)(\xi) + \mathcal{F}(u)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi)\,,$$

da cui

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = -\frac{\mathcal{F}(f)(\xi)}{\xi^2 - 2i\xi - 1}\,.$$

Antitrasformando $\frac{1}{\xi^2-2i\xi-1}$ si ha

$$v(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \frac{\mathrm{e}^{i\xi\,x}}{\xi^2 - 2i\xi - 1}\,d\xi\,.$$

Se $x > 0$, la funzione $g(z) = \frac{1}{z^2-2iz-1} = \frac{1}{(z-i)^2}$ ha un polo di ordine due in $z = i$ (ovvero, nel semipiano $\Im(z) > 0$). Allora

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{\mathrm{e}^{i\xi\,x}}{\xi^2 - 2i\xi - 1}\,d\xi = 2\pi\,i\,\mathrm{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^{iz\,x}}{(z-i)^2}, i\right] = -2\pi\,x\,\mathrm{e}^{-x}\,.$$

Se $x < 0$, $v(x)$ vale zero (perché i poli di $g(z)$ non sono nel semipiano $\Im(z) < 0$), così come $v(0) = 0$. In definitiva,

$$v(x) = -x\,\mathrm{e}^{-x}\,\chi_{(0,+\infty)}(x)\,,$$

e quindi

$$u(x) = \int_{\mathbf{R}} f(y)\,(x-y)\,\mathrm{e}^{-(x-y)}\,\chi_{(0,+\infty)}(x-y)\,dy = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,(x-y)\,\mathrm{e}^{-(x-y)}\,dy\,.$$

**9)** Trovare una formula risolutiva per l'equazione

$$u''(x) + a^2 u(x) = f(x)\,, \qquad a > 0\,,\ f \in L^1(\mathbf{R})\,.$$

Trasformando l'equazione, si trova

$$-\xi^2\,\mathcal{F}(u)(\xi) + a^2\,\mathcal{F}(u)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi)\,,$$

ovvero

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \frac{\mathcal{F}(f)(\xi)}{a^2 - \xi^2}\,.$$

Sia ora

$$v(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \frac{e^{i\xi\,x}}{a^2-\xi^2}\,d\xi\,.$$

Sia $x > 0$; dal momento che $g(z) = \frac{1}{a^2-z^2}$ ha due poli sull'asse reale, per calcolare l'integrale dobbiamo scegliere un percorso che "eviti" $z = \pm a$. Sia $\gamma_{R,\delta}$ l'unione della semicirconferenza $C'_R$ di centro l'origine e raggio $R > a$ contenuta nel semipiano $\Im(z) > 0$, dei segmenti da $-R$ a $-a-\delta$, da $-a+\delta$ ad $a-\delta$ e da $a+\delta$ ad $R$, e delle due semicirconferenze $C^-_\delta$ e $C^+_\delta$ di centro $\pm a$ e di raggio $\delta$, contenute nel semipiano $\Im(z) > 0$. Siccome l'integrale su $C'_R$ tende a zero per $R$ tendente ad infinito, mentre l'integrale sui segmenti tende al valore principale dell'integrale che definisce $v$, si ha

$$v(x) = \frac{1}{2\pi}\lim_{\delta\to 0^+}\int_{C^-_\delta\cup C^+_\delta} \frac{e^{iz\,x}}{a^2-z^2}\,.$$

Svolgendo i conti, si trova

$$v(x) = \frac{\mathrm{sen}(ax)}{2a}\,.$$

Se $x < 0$ l'integrale vale $v(-x)$ (basta cambiare variabile), e pertanto

$$u(x) = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\mathrm{sen}(a|x-y|)\,dy\,.$$

**10)** Sia $\delta(x)$ l'antitrasformata di $f(\xi) \equiv 1$ (non provare a calcolarla esplicitamente!). Dimostrare che

$$\int_{\mathbf{R}} \delta(x-y)\,g(y)\,dy = g(x)\,,$$

per ogni $x$ in $\mathbf{R}$ e per ogni $g$ in $L^1(\mathbf{R})$ tale che $g = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(g))$. Dedurne che, se $\delta$ fosse una funzione, si avrebbe $\delta(x) = 0$ quasi ovunque in $\mathbf{R}$ (suggerimento: si scelga $g = \chi_{(x-\varepsilon,x+\varepsilon)}$).

Per definizione,

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{i\xi\,x}\,d\xi\,.$$

Pertanto, per Fubini, e per le ipotesi su $g$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}} \delta(x-y)\, g(y)\, dy &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \left( \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{i\xi\,(x-y)}\, d\xi \right) g(y)\, dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \left( \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-i\xi\,y} g(y)\, dy \right) \mathrm{e}^{i\xi\,x}\, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{i\xi\,x}\, \mathcal{F}(u)(\xi)\, d\xi = g(x)\,.\end{aligned}$$

Se $g = \chi_{(x-\varepsilon,x+\varepsilon)}$, allora

$$1 = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \delta(x-y)\, dy = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(z)\, dz\,,$$

qualsiasi sia $\varepsilon$. Pertanto,

$$\int_E \delta(z)\, dz = 0\,,$$

per ogni $E$ sottoinsieme di $\mathbf{R}$ che non contiene lo zero. La “non funzione” $\delta$ si chiama “delta di Dirac”, ed è una misura.